TD n°2. Applications linéaires, matrices.

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui sont linéaires ? Justifiez.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, y, 0) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y, x^5) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+3y-5z \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-x, 2y, x-y) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^z, e^y) \end{array}$$

Exercice 2 Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-z, -x+3y+z, z) \end{array}$$

et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)$$

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,1,0)\ v_3 = (0,1,0).$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1,1,1)$ et $f(1,0,-1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. (a) Calculer les images de e_1, e_2 et e_3 par f.
   (b) En déduire la matrice de f dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$
4. *Une base plus adaptée...*On admet que la famille $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (a) A l'aide de notre définition "provisoire" de base, que faudrait il vérifier pour montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer les images de v_1, v_2, v_3 par f.
   (c) En déduire la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Démontrer que

$$gof = 0 \Longleftrightarrow Im(f) \subset Ker(g).$$

(On a noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$)

Exercice 4 On note $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + f_3,\ u(e_2) = -f_1 - f_2,$$

$$u(e_3) = -4f_2 + 2f_3,\ u(e_4) = 2f_1 + f_3.$$

1. Ecrire la matrice de u dans ces bases.
2. Donner explicitement $u(x,y,z,t)$.
3. Déterminer $Ker(u)$ et décrire $Im(u)$.

Exercice 5 On considère les applications suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+4y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y) \end{array}$$

Pour chacune des applications f_i

1. Vérifer la linéarité.

2. Donner la matrice de chacune des applications dans les bases canoniques correspondantes
3. Déterminer le noyau de f_i

Exercice 6 Soit M la matrice dans les bases canoniques d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Caculer $f(3, 1, 2)$.
2. Sans calculs, donner une solution de l'équation $f(x) = (0, 6, 2)$.
3. Déterminer $ker(f)$.

****

Exercice 7 *Un exemple d' application de l'algèbre linéaire...*

Une entreprise de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair. Pour la fabrication d'une robe, il faut 1,50m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair. Enfin, la confection d'un pantalon demande 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle respectivement x, y et z le nombre de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et a, b et c les quantités de tissus (en m) de boutons et de fermetures Éclair utilisés pour leur réalisation.

On appelle M, A et X les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. (a) Vérifier que $MX = A$.
   (b) Déterminer A pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.
2. On consière la matrice :

$$M' = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

   (a) calculer MM'.
   (b) Ecrire la matrice X en fonction de M' et de A.
   (c) En déduire les quantités de jupes, de robes et de pantalons fabriqués quand on a utilisé 735 mètres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.
3. L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de ventes des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Tissu au mètre	Bouton	Fermeture
Fournisseur 1	45	5	6
Fournisseur 2	48	4,5	5,5

   On note les matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}$$

   (a) Que représente la matrice produit CA ?
   (b) Calculer CA.

****